ابن‌سینا و گودل:
«عدم برهان بر امتناع» یا «برهان بر عدم امتناع»؟[1]

مهدی عظیمی[2]

چکیده

گودل امکان فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار را از رهگذر برهان بر عدم امتناعِ آن ثابت می‌کند؛ این در حالی است که بر پایه سخن ابن‌سینا در بند ما قبل آخرِ اشارات، عدم برهان بر امتناعِ چیزی برای اثبات امکان آن بسنده است. اکنون شایسته است بپرسیم که آیا کار گودل بیهوده است، یا سخن ابن‌سینا نادرست؟ پاسخ این جستار گزینه سوم است: هیچ کدام. «امکان» در فلسفه اسلامی دست‌کم هشت معنا دارد: ۱ـ امکان عام؛ ۲ـ امکان خاص؛ ۳ـ امکان اخص؛ ٤ـ امکان استقبالی؛ ٥ـ امکان استعدادی؛ ٦ـ امکان وقوعی؛ ۷ـ امکان فقری؛ ۸ـ احتمال. در سخن ابن‌سینا امکان به معنای احتمال است که امری ذهنی، انفسی، و سوبژکتیو است، و از این‌رو به چیزی بیش از عدم برهان بر امتناع نیاز ندارد؛ امّا امکان در کلام گودل امری عینی، آفاقی، و اُبژکتیو است که نیازمند برهان بر عدم امتناع است. بنابراین، نه کار گودل بیهوده است و نه سخن ابن‌سینا نادرست.

واژگان کلیدی

امکان، احتمال، امتناع، گودل، ابن‌سینا، فرضیه پیوستار

۱ـ تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۱۱؛ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۳/۱۹

۲ـ استادیار گروه فلسفه و کلام اسلامی دانشگاه تهران

mahdiazimi@ut.ac.ir

طرح مسئله

«کدام‌یک از ما شادمان نخواهد شد از برافکندن نقابی که آینده در پسِ آن پنهان شده است؛ و از نظر افکندن به پیشرفت‌های بعدیِ دانشمان و به رازهای دگردیسی آن در سده‌های فرا رو؟ چه هدف‌های ویژه‌ای وجود خواهند داشت که ذهن‌های برجسته ریاضیاتی نسل‌های آینده به آن‌ها در خواهند پیچید؟ سده‌های پیش رو چه روش‌های تازه و واقعیت‌های نوینی را در پهنه گسترده و سرشار اندیشه ریاضیّاتی آشکار خواهند ساخت؟» *(Hilbert, 1900, P.407)*.

این‌ها نخستین جمله‌های سخنرانی پرآوازه دیوید هیلبرت، ریاضی‌دان برجسته آلمانی است که به سال ۱۹۰۰ در همایش جهانی ریاضی‌دانان در پاریس ایراد شد. هیلبرت در این سخنرانی سیاهه‌ای از بیست‌وسه مسئله حل‌نشده ریاضیات را پیش نهاد که به رأی او «از رهگذر بحث درباره آن‌ها پیشرفت علم را می‌توان چشم در راه بود» *(Ibid, P.412)*. بر صدر این مسئله‌های بیست‌وسه‌گانه، مسئله پیوستار کانتور[۱] جای داشت.

گئورگ کانتور[۲] (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) ریاضی‌دان آلمانیِ روسی‌تبار و بنیان‌گذار نظریه مجموعه‌ها است؛ نظریه‌ای که پس از او پایه ریاضیات شد. درمیان‌آوردنِ مفهوم تناظر یک‌به‌یک میان مجموعه‌ها، تعریف مجموعه‌های بی‌پایان و خوش‌ترتیب، اثبات بزرگ‌تر بودن عددهای حقیقی از عددهای طبیعی، و پدیدآوردن حساب عددهای اصلی و ترتیبی از جمله مهم‌ترین کارهای کانتور در ریاضیات است. او یکی از بحث‌انگیزترین چهره‌های تاریخ ریاضیات بوده و دیدگاه‌هایش موافقان و مخالفان نیرومندی داشته است. کسانی چون راسل و هیلبرت، او و کارهایش را بسیار می‌ستودند؛ و در برابر، افرادی چون کرونِکر، پوئانکاره، و ویتگنشتاین بر نظریه مجموعه‌ها و آموزه عددهای ترامتناهی[۳] او سخت می‌تاختند *(Dauben, 1979, P.1; Rodych, 2007, § 2.6)*.

مسئله پیوستار کانتور چیست؟ برای پاسخگویی به این پرسش باید نگاهی به نظریه مجموعه‌های *کانتور* بیفکنیم. یکی از مهم‌ترین مفاهیم این نظریّه، چنان‌که پیش‌تر نیز اشاره کردیم، مفهوم «تناظر یک‌به‌یک» است. شادروان احمد بیرشک تمثیل نمکینی برای توضیح این مفهوم به‌کار برده است: «شما اگر به یک روستایی عامی تعدادی گردو بدهید و بپرسید که آیا عده آن‌ها از عده بچه‌هایی که دور او جمع شده‌اند بیش‌تر است یا کم‌تر، او که حساب نمی‌داند به هر بچه یک گردو می‌دهد. اگر به

1- Cantor’s Continuum Problem
2- Georg Cantor
3- transfinite

هر بچه یک گردو رسید و برای او گردو باقی ماند تعداد گردوها بیشتر است و اگر گردو باقی نماند تعداد هر دو یکی است و اگر سر بچه‌ای بی‌کلاه ماند تعداد گردوها کمتر است. این کار را مقابله یک به یک می‌نامند» *(بیرشک، ۱۳۵۳، ص۳۴۸).* کار روستایی ممکن است در نگاه نخست خنده‌دار به نظر آید. شاید اگر ما به‌جای او بودیم، بی‌درنگ گردوها و بچه‌ها را جداگانه می‌شمردیم و دو عددِ به‌دست‌آمده را با هم مقایسه می‌کردیم. این کار بی‌شک درباره مجموعه‌های متناهیِ کوچکْ کارآمد است، ولی درباره مجموعه‌های متناهیِ بزرگ روش همان روستایی بهتر است. «به‌عنوان مثال، برای مقایسه تعداد صندلی‌های موجود در یک سالن سینما و تعداد تماشاگرانی که برای مشاهده فیلم داخل سالن آمده‌اند بهتر است، به جای شمارش صندلی‌ها و تماشاگران، از تماشاگران خواسته شود که بر روی صندلی‌ها بنشینند. از این طریق به‌راحتی می‌توان زیادت، نقصان، و یا تساوی مجموعه صندلی‌ها نسبت به مجموعه تماشاگران را تشخیص داد» *(خادم‌زاده و سعیدی‌مهر، ۱۳۸۸، ص۶۶).* اکنون اگر با مجموعه‌های نامتناهی سروکار داشته باشیم، عضوشماری به‌کلّی ناکارآمد خواهد بود؛ زیرا عضوهای چنین مجموعه‌هایی را نمی‌توان شمرد. بنابراین روش عضوشماری برای مجموعه‌های متناهیِ کوچکْ آسان و کارآمد، برای مجموعه‌های متناهیِ بزرگْ دشوار و ناکارآمد، و برای مجموعه‌های نامتناهی محال است. و کانتور که با مجموعه‌های نامتناهی سروکار داشت، برای فهم برابری، فزونی، یا کاستی آن‌ها نسبت به هم، ناگزیر روش روستایی را به‌کار بست؛ یعنی تناظر یک‌به‌یک را.

کانتور به هر مجموعه عددی نسبت می‌داد که نشان‌گر شمار عضوهای آن مجموعه بود. به این عدد «عدد اصلی»[۱] می‌گویند. بنابراین اگر میان دو مجموعه تناظر یک‌به‌یک برقرار باشد، عدد اصلیِ آن دو برابر است، یعنی شمار عضوهایشان مساوی است. کانتور عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی[۲] را $\aleph_0$ نامید[۳] و، چنان‌که در جدول پایین دیده می‌شود، از طریق تناظر یک‌به‌یک نشان داد که این مجموعه و زیرمجموعه‌هایش (مانند مجموعه اعداد زوج، یا فرد) عدد اصلیِ یکسانی دارند. بنابراین در مجموعه‌های نامتناهی همیشه کل بزرگ‌تر از جزء نیست بلکه مساوی نیز توانند بود.

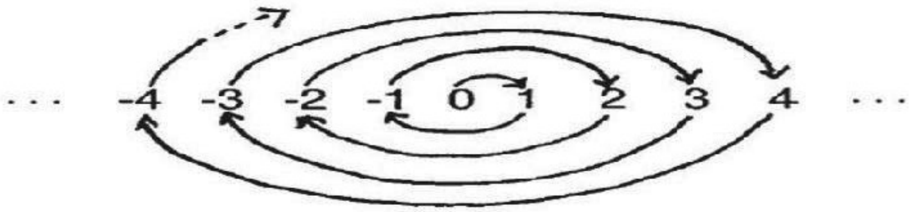
1- Cardinal Number

۲ـ مجموعه اعداد طبیعی: $\{1, 2, 3, 4, ...\}$.

۳ـ $\aleph$ حرف اول الفبای عبری است که الف تلفظ می‌شود.

مضربهای میلیارد	مضربهای میلیون	مضربهای ۵	عددهای فرد	عددهای زوج	عددهای طبیعی
۰ میلیارد	۰ میلیون	۰	۰	۰	۰
۱ ″	۱ ″	۵	۱	۲	۱
۲ ″	۲ ″	۱۰	۳	۴	۲
۳ ″	۳ ″	۱۵	۵	۶	۳
۴ ″	۴ ″	۲۰	۷	۸	۴
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n ″	n ″	۵n	۲n-۱	۲n	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

کانتور سپس به مقایسه مجموعه اعداد طبیعی با مجموعه اعداد صحیح[1] پرداخت. این مجموعه اعداد منفی را هم در بر می‌گیرد و در نتیجه از هر دو سو نامتناهی است. بنابراین نامعقول نیست که بگوییم عدد اصلیِ آن، دو برابر (یا دست‌کم بزرگ‌تر از) عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی است. اما *کانتور* به شیوه زیر از طریق تناظر یک‌به‌یک نشان داد که عدد اصلیِ این دو مجموعه نیز برابر است.



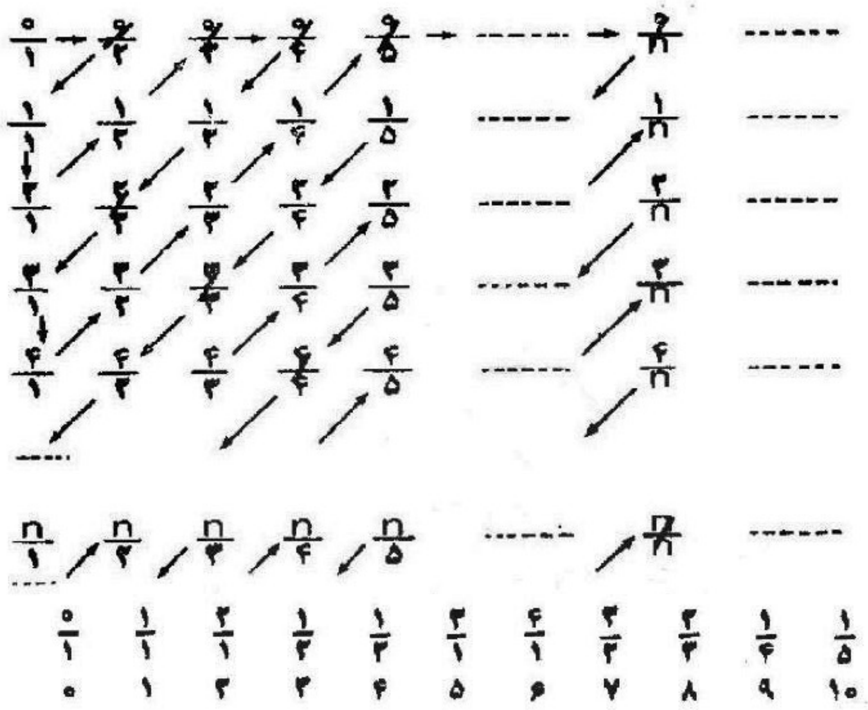
$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$
1	$\leftrightarrow$	0
2	$\leftrightarrow$	1
3	$\leftrightarrow$	-1
4	$\leftrightarrow$	2
5	$\leftrightarrow$	-2
6	$\leftrightarrow$	3
7	$\leftrightarrow$	-3
.	.	.
.	.	.

کانتور هم‌چنین به مقایسه مجموعه اعداد طبیعی با مجموعه اعداد گویا[2] پرداخت و نشان داد که

۱ـ مجموعه اعداد صحیح: {... ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ ,۱- ,۲- ,۳- ,...}.

۲ـ یعنی اعداد کسری که صورت و مخرج آن‌ها اعدادی صحیح‌اند ولی مخرج آن‌ها صفر نیست.

این دو نیز تناظر یک‌به‌یک دارند و از این‌رو عدد اصلی هر دو یکی، یعنی $\aleph_0$ است. او جدولی مانند جدول زیر ترتیب داد که سطر اوّلِ آن شامل اعداد گویا با صورتِ ۰، سطر دوم آن شامل اعداد گویا با صورتِ ۱، سطر سوم آن شامل اعداد گویا با صورتِ ۲ بود، و به همین سان تا بی‌نهایت. سپس اعداد برابر را از این جدول خط زد و اعداد باقی‌مانده را ردیف کرد و آن‌ها را با اعداد طبیعی تناظر یک‌به‌یک داد.



تا این‌جا دانستیم که میان مجموعه اعداد طبیعی با زیرمجموعه‌هایش، با مجموعه اعداد صحیح، و با مجموعه اعداد گویا تناظر یک‌به‌یک برقرار است و از این‌رو عدد اصلی همه آن‌ها یکسان و برابر با $\aleph_0$ است. بنابراین ممکن است این تصوّر در ذهن پدید آید که می‌توان میان مجموعه اعداد طبیعی با همه مجموعه‌های نامتناهی تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد. اما کانتور نشان داد که چنین تناظری میان مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد حقیقی[1] برقرار نیست؛ یعنی عدد اصلیِ مجموعه اعداد حقیقی برابر با

۱ـ مجموعه همه اعداد گویا و گنگ. اعداد گنگ اعدادی‌اند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت یک عدد گویا نشان داد بلکه تنها با زنجیره‌ای نامتناهی از ارقام که دارای الگوی تکراری نیستند، نمایش داده می‌شوند. مانند، $\sqrt{2}$ که برابر است با ...۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲.

$\aleph_0$ نیست. او برای تعیین عدد اصلیِ مجموعه اعداد حقیقی با خود اندیشید که اگر بتواند تعداد اعداد حقیقیِ بین ۰ و ۱ را بشمارد، خواهد توانست که بقیّه را هم بشمارد. بنابراین جدولی ترتیب داد که همه اعداد حقیقیِ بین ۰ و ۱ را در بر گیرد؛ به این شیوه:

$$
\begin{aligned}
n_۱ &= ۰/۱۱۱۱۱... \\
n_۲ &= ۰/۱۲۱۱۱... \\
n_۳ &= ۰/\ ۱۲۳۴... \\
&\ \ \ ... \\
&= ۰/\ ۲۳۵۶... \\
&\ \ \ ... \\
&= ۰/\ ۳۷۸۹... \\
&\ \ \ ... \\
&= ۰/\ ۹۸۷۶... \\
&\ \ \ ... \\
&= ۰/\ ۹۹۹۹...
\end{aligned}
$$

او سپس، با فرض این‌که تعداد این عددها برابر با $\aleph_0$ است، دریافت که شمار بی‌کرانی عدد حقیقی می‌توان ساخت که در این جدول نیست؛ به این صورت که n' را به گونه‌ای می‌نویسیم که رقم اوّلش پس‌از ۰، ۱ باشد اگر رقم اول n_1، ۱ نباشد وگرنه ۲ باشد؛ و رقم دومش ۱ باشد اگر رقم دومِ n_2، ۱ نباشد وگرنه ۲ باشد؛ و به همین سان تا پایان.

با این ترفند، دست‌کم یک رقم n' با یک رقمِ هر یک از اعداد موجود در جدول فرق خواهد داشت و بنابراین خودش در جدول نخواهد بود. به همین روش می‌توان بی‌نهایت عدد حقیقی مانند n' ساخت. کانتور این بی‌نهایت عدد حقیقی را $\aleph_1$ نامید؛ و باز به همین روش ثابت کرد که عددی بزرگ‌تر از $\aleph_1$ هم وجود دارد. او این $\aleph$ها را اعداد ترامتناهی نام نهاد. بنابراین تعداد اعداد حقیقیِ بین ۰ و ۱ از تعداد اعداد طبیعی، یعنی از $\aleph_0$، به‌مراتب بزرگ‌تر است. از سوی دیگر *کانتور* ثابت کرد که مجموعه اعداد حقیقیِ بین ۰ و ۱ با هر مجموعه دیگری از اعداد حقیقی تناظر یک‌به‌یک دارد. از این‌رو عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی که c نامیده می‌شود و برابر با $2^{\aleph_0}$ است، بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است؛ یعنی:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} (= c)$$

اکنون بازگردیم به مسئله پیوستار. در حدود سال ۱۸۸۰ ،کانتور این پرسش را درافکند که:

آیا عددی اصلی میان $\aleph_0$ *و* $2^{\aleph_0}(=c)$ *وجود دارد؟*

به دیگر سخن، آیا مجموعه‌ای وجود دارد که از نظر تعداد عضوها حد وسط مجموعه اعداد طبیعی و حقیقی باشد، یعنی بزرگ‌تر از اولی و کوچک‌تر از دومی باشد؟ این را «مسئله پیوستار» گویند. او حدس می‌زد که پاسخْ منفی است:

عددی اصلی مانند x *که در* $\aleph_0 < x < c(=2^{\aleph_0})$ *صدق کند، وجود ندارد.*

کانتور هیچ‌گاه نتوانست این حدس را که به «فرضیه پیوستار»[1] معروف شد، به اثبات برساند. از مسئله و فرضیه پیوستار کانتور روایت فراگیرتری هم به دست داده شده است که با قید «تعمیم‌یافته» از آن یاد می‌شود:

مسئله تعمیم‌یافته پیوستار- آیا عددی اصلی وجود دارد که میان دو عدد اصلی ترامتناهی a و 2^a واقع باشد؟

فرضیّه تعمیم‌یافته پیوستار- عدد اصلی ترامتناهی a هرچه باشد، عددی اصلی مانند x وجود ندارد به‌گونه‌ای که $a < x < 2^a$.[2]

پس‌از آن‌که هیلبرت، مسئله پیوستار را در صدر بیست‌وسه مسئله بازِ ریاضیات اعلام کرد، دو رخداد جالب برای آن پیش آمد. نخست این‌که در ۱۹۳۸، کورت گودل[3] (۱۹۰۶-۱۹۷۸)، یکی از برجسته‌ترین منطق‌دانان تاریخ، اثبات کرد که «فرضیه کانتور با اصل‌های موضوع نظریه مجموعه‌ها، به شرط آنکه این اصل‌ها سازگار باشند، ابطال‌ناپذیر[4] است» (گودل، ۱۳۸۲، ص۲۲۳). حادثه دوم ۲۵ سال بعد رخ نمود، هنگامی‌که پل کوهن[5]، ریاضی‌دان جوانِ دانشگاه استنفورد[6]، در ۱۹۶۳ نشان داد که این فرضیه با اصل‌های موضوع نظریه مجموعه‌ها اثبات‌ناپذیر است. بنابراین «وضع فرض پیوستار تعمیم‌یافته در نظریه مجموعه‌ها، همانند اصل توازی اقلیدس (اصل پنجم) در هندسه است؛ می‌توانیم آن را بپذیریم یا رد کنیم و در هر حالت یک تئوری سازگار ریاضی به دست آوریم.» *(لین و لین، ۱۳۸۶، ص۱۵۰).*

1- Continuum Hypothesis

۲ـ برای اطلاع بیشتر بنگرید به: *لین و لین، ۱۳۸۶، ص۱۴۹*

3- Kort Gödel

۴ـ تأکید از ناقل.

5- Paul Cohen

6- Stanford

از میان دو رخداد یادشده، تنها رخداد نخست با جستار کنونی پیوند دارد؛ از این‌رو، رخداد دوم را به کناری می‌نهیم و اندکی درباره رخداد نخست و پدیدآورنده آن سخن می‌گوییم.

گودل و «امکان» فرضیه پیوستار

کورت گودل به سال ۱۹۰۶ در شهر برنو[۱] واقع در استان موراویا[۲] که اکنون در جمهوری چک است[۳] از پدر و مادری آلمانی‌تبار زاده شد. پس‌از آن‌که دوران مدرسه را در زادگاهش گذراند، به سال ۱۹۲۴ دانشجوی فیزیک نظری در دانشگاه وین شد. دلبستگی‌اش به «دقت» او را از فیزیک به ریاضیات و منطق ریاضی کشاند، به‌گونه‌ای که در ۱۹۲۶ به ریاضیات تغییر رشته داد و همزمان به عضویّت حلقه وین درآمد[۴]. در ۱۹۲۹ دانشگاه را به پایان رساند و در ۱۹۳۰ در کونیگسبرگ، که میزبان همایشی درباره مبانی ریاضیات بود، کشف پرآوازه خود را که به قضیه‌های ناتمامیت معروف است، اعلام کرد و مهم‌ترین رخداد تاریخ منطقِ سده بیستم را رقم زد. درخشش *گودل* در کونیگسبرگ راه او را برای تدریس در دانشگاه وین هموار کرد و در ۱۹۳۳ مدرس این دانشگاه شد. در ۱۹۴۰ به آمریکا مهاجرت کرد و در بنیاد مطالعات پیشرفته واقع در پرینستون همکار و دوست آلبرت اینشتین گردید. گودل در واپسین سال‌های زندگی‌اش دچار بیماری پارانوئیا[۵] شد و چون پیوسته گمان می‌کرد که غذایش زهرآلود است، چندان گرسنگی کشید که در ژانویه ۱۹۷۸ از پای درآمد *(هینتیکا، ۱۳۸۸، ص۹ـ۱۲)*.

بی‌شک شاهکار گودل اثبات قضیه‌های اول و دوم ناتمامیت است[۶]؛ ولی ما در این جستار با یکی دیگر از دستاوردهای مهم او سر و کار داریم. او در نیم‌سال پاییزی ۱۹۳۸ـ۱۹۳۹ در بنیاد مطالعات پیشرفته درس‌گفتارهایی را ارائه کرد که در ۱۹۴۰ با نام *سازگاری اصل موضوع انتخاب و فرضیه*

1- Brno
2- Moravia

۳ـ موراویا در زمان گودل بخشی از پادشاهی دوگانه اتریش ـ مجارستان (Austria–Hungary) بوده که از سال ۱۸۶۷ تا ۱۹۱۸ در اروپای مرکزی سیطره داشته است. این کشور از اتحاد امپراتوری اتریش و پادشاهی مجارستان به وجود آمد.

۴ـ با وجود این، گودل هیچ‌گاه خود را یک پوزیتیویست نمی‌دانست.

۵ـ بیماری‌ای روانی که مبتلای آن بدگمانی شدیدی می‌یابد.

۶ـ قضیه نخست ناتمامیت نشان می‌دهد که هر دستگاه اصل موضوعی حساب ناتمام است، یعنی دربردارندهٔ مجموعه تام و کاملی از اصل‌های موضوع نیست؛ زیرا همواره جمله‌ای مانند G وجود دارد که نه G و نه ~G هیچ یک برپایه آن اصل‌های موضوع اثبات‌پذیر نیست. این قضیّه منطق‌گروی راسل و وایتهد را به‌کلّی بازایستاند. قضیّهٔ دوم ناتمامیّت که در واقع فرع قضیه نخست است نشان می‌دهد که سازگاری یک دستگاه اصل موضوعی حساب را نمی‌توان در خود آن دستگاه اثبات کرد. این قضیه نیز برنامه هیلبرت را با دست‌اندازهایی دشوار روبه‌رو کرد. برای آگاهی بیش‌تر بنگرید به: *استراول، ص۱۹ـ۲۶ و هینتیکا.*

تعمیم‌یافته پیوستار با اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها انتشار یافت. چنان‌که در پیش‌گفتار این اثر آمده است، «در این درس‌گفتارها ثابت خواهد شد که اصل موضوع انتخاب و فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار (یعنی این گزاره که برای هر α، $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) با دیگر اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها سازگارند، اگر این اصول موضوع [خودشان] سازگار باشند *(Gödel, 1940, P.1)*. به دیگر سخن، چنان‌که هینتیکا می‌گوید: «او موفق به اثبات درستی فرضیه پیوستار عام نشد اما قادر به انجام بهترین کار ممکن پس از آن، یعنی [اثبات] *امکان*[1] آن... بود» *(هینتیکا، ۱۳۸۸، ص۸۴)*.

اکنون شایسته است بپرسیم که گودل «امکانِ» فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار را چگونه اثبات کرد؟ او خود چنین پاسخی می‌دهد: «آن‌چه ما اثبات خواهیم کرد این است که اگر از اصل موضوع انتخاب و فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار تناقضی در Σ استنتاج شود، می‌توان آن را به تناقضی برآمده از اصول موضوع Σ تبدیل کرد» (Gödel, 1940, p.2). ولی فرض این است که اصول موضوع Σ سازگارند و تناقضی از آن‌ها برنمی‌آید؛ و با این فرض، از افزودن فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار به اصول موضوع Σ باز هم تناقضی برنخواهد آمد. «به عبارت دیگر، فرض پیوستار تعمیم‌یافته نسبت به اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها سازگار است» *(لین و لین، ۱۳۸۶، ص۱۵۰)*.

بنابراین، گودل «امکان فرضیه تعمیم‌یافته پیوستار» را از رهگذر «اقامه برهان بر عدم امتناع آن» اثبات می‌کند. به دیگر سخن، گودل اثبات می‌کند که فرضیه پیوستار، چون به تناقض نمی‌انجامد، صدقش ممتنع نیست و «عدم امتناع صدق» همان «امکان عام صدق» است. اکنون زمینه برای مطالعه‌ای تطبیقی آماده است.

کسانی که افزون بر کارهای *گودل* با نوشته‌های *ابن‌سینا*، به‌ویژه *الإشارات و التنبیهات*، آشنایی دارند، ممکن است که در میان سخنان او جمله‌ای مشهور را دیده باشند یا ببینند که به‌ظاهر با کار گودل سر ناسازگاری دارد و آن را بیهوده می‌شمارد. پرسش این جستار این است که آیا کار گودل و سخن ابن‌سینا به‌راستی ناسازگارند؟ آیا راهی برای هماهنگ‌ساختن آن دو وجود ندارد؟ نخست ببینیم که ابن‌سینا چه می‌گوید.

ابن‌سینا و راه اثبات «امکان»

ابن‌سینا در بند قبل از آخر اشارات سخنی می‌گوید که از جهات گوناگون سزاوار درنگ است. وی

۱ـ تأکید از ناقل.

در این بند به خواننده چنین «اندرز» می‌دهد که: مبادا زیرکی و دوری جستنت از عوام این باشد که منکرانه با هر چیزی به ستیز برخیزی، که این سبُک‌خِردی و ناتوانی است. و نارواییِ تکذیب تو نسبت به چیزی که هنوز حقیقتش برایت آشکار نشده، کم‌تر نیست از نارواییِ تصدیق تو نسبت به چیزی که دلیل روشنش به دستت داده نشده است. بل‌که بر تو باد چنگ‌زدن به ریسمان توقف ـ حتی اگر زشت‌شمردن آن‌چه به گوشت می‌رسد، تو را بیازارد ـ تا هنگامی که استحاله آن برای تو برهانی نشده است. «پس درست این است که چنین اموری را در سرزمین امکان رها سازی تا هنگامی که برهان‌آورنده‌ای تو را از آن جدا نساخته است[۱]. و بدان که در طبیعت چیزهایی هست شگفت، و قوای عالی فعّال با قوای سافل منفعل اجتماعاتی دارند بر چیزهایی شگرف» *(ابن‌سینا، ۱۳۸۳، ص۴۱۸)*.

مقصود ابن‌سینا را در این بند می‌توان چنین خلاصه کرد: تا هنگامی که بر صدق گزاره‌ای ـ هر چند شایع و مشهور ـ برهان نداریم، پذیرش آن، و تا زمانی که بر کذب گزاره‌ای ـ هرچند شگفت و نامأنوس ـ دلیل نداریم انکار آن روا نیست. سخن *بوعلی* از منظر منطق، شناخت‌شناسی، و اخلاق باور[۲] بسی سزاوار درنگ و بررسی است. ولی در این‌جا بر آنیم که تنها یک جمله از این عبارت را با دید منطقی بررسی کنیم؛ جمله‌ای که در متن متمایز شده است. این جمله بدان معنا است که «عدم برهان بر امتناع» مستلزم «امکان» است. اما «امکان» معناهای گوناگونی دارد. *ابن‌سینا* در *الإشارات* چهار معنا برای آن برمی‌شمرد:

۱ـ امکان عام، که به معنای سلب امتناع از رابط، و ملازم با سلب ضرورت از نقیض رابط است. مثلاً «الف ب است به‌امکان عام»؛ یعنی ممتنع نیست که الف ب باشد، یا ضروری نیست که الف ب نباشد.

۱ـ تأکید از ناقل

۲ـ اصطلاح «اخلاق باور» (The Ethics of Belief) به ویلیام کینگدن کلیفورد (William Kingdon Clifford) (۱۸۴۵ـ۱۸۷۹) بازمی‌گردد. او مقاله‌ای دارد با همین نام که در آن، ارتباط دلیل و باور را چنین بیان می‌دارد: «همیشه، هر جا، و برای هر کسی خطاست که بر پایهٔ دلیل ناکافی به چیزی باور داشته باشد» (روشن است که آن «چیز» می‌تواند سلبی باشد یا ایجابی). از نظر کلیفورد، همه ما *اخلاقاً مکلفیم* که شواهد و دلایل هر چیزی را به‌دقت بررسی کنیم و در صورت عدم کفایت آن‌ها از باور به آن خودداری کنیم. هر اندازه هم که یک باور پیش‌پاافتاده و بی‌اهمّیّت باشد، باز این *تکلیف اخلاقی* باید گزارده شود، چون زیر پا گذاشتن آن می‌تواند «نقش خود را برای همیشه بر منش ما جا بگذارد». دیدگاه کلیفورد در مقالهٔ معروف ویلیام جیمز (William James)، به نام «اراده معطوف به باور» ("The Will to Believe") نقد شده است *(Audi, 1999, P. 146)*.

۲ـ امکان خاص، که به معنای سلب ضرورت هم از رابط و هم از نقیض رابط است؛ مثلاً «الف ب است به‌امکان خاص» یعنی نه ضروری‌ست که الف ب باشد و نه ضروری‌ست که الف ب نباشد. بنابراین امکان خاص مرکب از دو امکان عام است.

۳ـ امکان اخص، که به معنای سلب ضرورت‌های ذاتی، وصفی، و وقتی است؛ ولی ضرورت به‌شرط محمول را نفی نمی‌کند؛ مانند «انسان نویسنده است به‌امکان اخص» که یعنی انسان نه بر پایه ذاتش، نه به‌خاطر وصفی از اوصافش، و نه در زمانی، ضروری نیست که نویسنده باشد.

۴ـ امکان استقبالی، که به معنای سلب همه ضرورت‌ها حتی ضرورت به‌شرط محمول است؛ زیرا این امکان ویژه امور آینده است و امور آینده تحقّق نیافته‌اند که ضرورت به شرط محمول داشته باشند *(ابن‌سینا، ۱۳۸۳، ج۱، ص۱۵۱ـ۱۵۷)*.

ملاصدرا پس‌از آن‌که همین چهار معنا را برمی‌شمرد و شرح می‌دهد، معنای پنجمی را هم به این فهرست می‌افزاید:

۵ـ امکان استعدادی، که به معنای آمادگی ماده برای پذیرش صورت‌ها و عرض‌هاست. او تأکید می‌کند که امکان به این معنا، نه یک مفهوم منطقی بلکه یک صفت هستی‌شناختی است *(شیرازی، ۱۴۲۳، ج۱، ص۱۶۲ـ۱۶۶)*.

علامه طباطبایی پس‌از ذکر این پنج معنا، دو معنای دیگر نیز برای امکان برمی‌شمرد:

۶ ـ امکان وقوعی، که به معنای لازم نیامدن محال از فرض وقوع شیء است.

۷ـ امکان فقری، که عبارت است از وابستگی وجودیِ معلول به علت *(طباطبایی، ۱۴۲۴، ص۶۲)*.

بنابراین تا این‌جا می‌توان گفت که امکان دست کم هفت معنا دارد. از این‌رو، شایسته است بپرسیم که *ابن‌سینا* کدام امکان را منظور داشته است. به‌ظاهر، او در عبارت یادشده از امکانی سخن می‌گوید که در برابر امتناع است، و چنین امکانی همان «امکان عام» است. پس، ظاهر سخن او نشان‌گر این است که عدم برهان بر امتناع چیزی مستلزم امکان عامّ آن است. در این صورت، سخن *بوعلی* در رویارویی آشکار با کار گودل قرار می‌گیرد. چه، گودل با تلاشی ذهن‌فرسا بر عدم امتناع فرضیه پیوستار برهان آورده و از این رهگذر امکان عامّ آن را به اثبات رسانده است. بر پایه سخن ابن‌سینا، چنین تلاشی بیهوده است؛ چون همین‌که بر امتناع فرضیه پیوستار برهانی نیست، برای پذیرش امکان عام آن بسنده است. به دیگر سخن، در حالی‌که گودل «امکان عام» فرضیه پیوستار را از رهگذر «برهان بر عدم امتناعِ» آن ثابت کرده است، بوعلی می‌گوید که «عدم برهان بر امتناع» برای اثبات «امکان عام» بسنده است. در این میانه حق با کیست؟

داوری میان گودل و ابن‌سینا

روشن است که «عدم برهان بر امتناع P» نمی‌تواند مستلزم «عدم امتناع، یعنی امکان عامP» باشد؛ زیرا هنگامی‌که بر امتناع P برهان نداریم، ممکن است که P به‌راستی ممتنع باشد، ولی ما به امتناع آن شناخت نداشته باشیم. آنچه مستلزم «امکان عام P» است، «برهان بر عدم امتناع آن» است؛ زیرا تنها هنگامی‌که ما عدم امتناع P را با برهان بدانیم، می‌توانیم بگوییم که P ممکن عامّ است؛ چراکه معنای امکان عام P، چنان‌که خود بوعلی می‌گوید[۱]: چیزی جز سلب امتناع آن نیست؛ بنابراین، در پاسخ به پرسش پیشین باید گفت که حق با گودل است.

توجیه سخن ابن‌سینا: امکان به معنای احتمال

با این همه، به نظر می‌رسد که برپایه نکته‌ای که فخر رازی در *شرح‌الإشارات* بدان اشاره می‌کند، می‌توان سخن ابن‌سینا را به‌گونه‌ای تفسیر کرد که با کار گودل سازگار افتد. فخر رازی در توضیحِ سخن بوعلی جمله زیر را برمی‌نگارد: «انسان حقیقت‌جو اگر برهانی در نفی یا اثبات برایش نمودار شد، بدان می‌گراید، وگرنه در آن بازمی‌ایستد و آن را در سرزمین امکان و احتمال و عدم جزم، نه به صحّت و نه به امتناعش، رها می‌سازد» *(رازی، ۱۳۸۴، ج۲، ص۶۶۵).*

رازی در این جمله «عدم جزم» را بر «احتمال»، و «احتمال» را بر «امکان» عطف می‌کند. اگر این عطف‌ها را تفسیری بگیریم، وی می‌خواهد بگوید که در این‌جا منظور بوعلی از «امکان» احتمال، به معنای عدم جزم است. در امکانی که به معنای احتمال نیست جزم وجود دارد ولی در امکانی که به معنای احتمال است هیچ جزمی وجود ندارد. برای نمونه، هنگامی‌که می‌گوییم «الف ب است، به امکان عامّ» جزم داریم که ثبوت ب برای الف ممتنع نیست؛ ولی هنگامی‌که می‌گوییم «الف ب است، به احتمال» هیچ جزمی نداریم، نه به امتناع ثبوت ب برای الف و نه به عدم امتناع آن. بنابراین، اگرچه امکان عام ناقض امتناع است، احتمال نافی آن نیست. پس بوعلی می‌گوید که «عدم برهان بر امتناع» مستلزم «احتمال» است که آغوشش هم به روی امتناع و هم به روی عدم امتناع باز است. آن‌گاه اگر «برهان بر عدم امتناع» پیدا شد، به «امکان عام» حکم می‌کنیم و اگر «برهان بر امتناع» یافت شد، به «امتناع» حکم می‌کنیم.

اکنون باید ببینیم که آیا این برداشت با سخنان خود ابن‌سینا سازگار است. *بوعلی* خود در *الشفاء* از

۱ـ برای اطلاع بیشتر بنگرید به: *ابن‌سینا، ۱۳۸۳، ج۱، ص۱۵۱*

سه احتمال در باب تفاوت معنای «امکان» و «احتمال» سخن می‌گوید: «به نظر می‌رسد که منظور از «محتمل» آن چیزی باشد که نزد ما چنین است ولی «ممکن» آن چیزی‌ست که در نفس‌الامر چنین است و به نظر می‌رسد که معنای دیگری هم از آن منظور باشد و آن این‌که «محتمل» چیزی است که به حالتِ آینده‌اش نگریسته می‌شود و اکنون معدوم است؛ ولی «ممکن» چیزی است که در وجود یا عدم دوام ندارد، خواه موجود باشد یا نباشد. و گروهی گفته‌اند که منظور از «ممکن» ممکن عام است و منظور از «محتمل» ممکن خاص است؛ ولی سخن ایشان در الفاظ وی [یعنی ارسطو] استمرار ندارد. و به نظر می‌رسد که میان «ممکن» و «محتمل» فرق دیگری هم باشد که اکنون نسبت به آن حضور ذهن ندارم و نیاز زیادی هم به پی‌جویی و کاوش آن نیست» *(ابن‌سینا، ۱۴۰۵هـ ص۱۱۴)*. بر این اساس، به سه شیوه میان امکان و احتمال می‌توان فرق نهاد:

۱ـ امکان امری عینی، آفاقی، و اُبژکتیو است؛ در حالی‌که احتمال امری ذهنی، انفسی، و سوبژکتیو است.

۲ـ امکان بیانگر ناپایداری وضع جاری یک چیز است، خواه آن چیز در وضع جاری‌اش موجود باشد یا معدوم؛ اما احتمال بیانگر چشمداشت و توقع نسبت به وضع آینده چیزی است که اکنون موجود نیست.

۳ـ امکان بطور ویژه به معنای امکان عام است و احتمال به معنای امکان خاص.

درباره تمایز سوم باید گفت که *ارسطو* در *ارگانون: در پیرامون گزارش* (21^a35) دو اصطلاح به‌کار می‌برد: یکی δυνατόν[۱] و دیگری ενδεχόμενον[۲]. *حنین بن اسحاق* در *کتاب العباره* اولی را به «یمکن» و دومی را به «یحتمل» ترجمه کرده است *(ابن‌اسحاق، ۱۹۸۰، ص۱۲۲)*. از سوی دیگر، می‌دانیم که اولی به معنای «ممکن به امکان عام»[۳] و دومی به معنای «ممکن به امکان خاص»[۴] است. بنابراین گزارش *ابن‌سینا* درست است. افزون بر این داوری ابن‌سینا که می‌گوید این تمایز در الفاظ ارسطو استمرار ندارد نیز درست است، زیرا ارسطو همیشه و همه‌جا این تمایز را رعایت نمی‌کند[۵]. افزون بر این، نکته دیگری که از این‌جا معلوم می‌شود این است که در نخستین ترجمه‌ها

1- dunatón
2- endekhómenon
3- possible
4- contingent

۵ـ برای اطلاع بیشتر بنگرید به: *ادیب سلطانی، ۱۳۷۸، ص۱۵۱ـ۱۵۲*

«احتمال» به یکی از معانی امکان به‌کار رفته، بنابراین شگفت نیست که در آثار بعدی، از جمله در آثار ابن‌سینا، «امکان» به یکی از معانی احتمال به‌کار رود.

باری، اگر در عبارت *ابن‌سینا* منظور از «امکان» احتمال باشد، باید پرسید: کدام احتمال؟ قطعاً معنای سوم منتفی‌ست؛ زیرا در این صورت *ابن‌سینا* باید بگوید که عدم برهان بر امتناع P مستلزم امکان خاص P است؛ اما امکان خاص، چنان‌که گفتیم مرکب از دو امکان عام است: امکان عام P و امکان عام $\sim P$؛ و همان‌گونه که بیان شد، عدم برهان بر امتناع P حتی نمی‌تواند مستلزم امکان عام P به‌تنهایی باشد، چه رسد به این‌که مستلزم امکان عام $\sim P$ هم باشد.

بنابراین، مراد ابن‌سینا از «امکان» یا احتمالِ به معنای نخست است یا احتمالِ به معنای دوم. اما این دو معنا با هم جمع‌پذیرند؛ زیرا «چشم‌داشت و توقّع» که در معنای دوم آمده گونه‌ای از «امر ذهنی، انفسی، و سوبژکتیو» است که در معنای نخست ذکر شده است. بدین‌سان، هنگامی‌که ابن‌سینا می‌گوید عدم برهان بر امتناع P مستلزم امکان P است، می‌توان آن را چنین فهمید که مستلزم احتمال P است، به این معنا که در ذهن فاعل شناسا این چشم‌داشتِ غیرجزمی را پدید می‌آورد که P صادق باشد یا در آینده ثابت شود که صادق است.

متکلمان و اثبات «امکانِ» بازگشت معدوم

در این‌جا شایان یادآوری است که بدفهمی سخن ابن‌سینا در تاریخ اندیشه اسلامی سبب شده است که برخی از متکلّمان به کژراهه‌هایی شگفت درغلتند. میرداماد روایت می‌کند که پاره‌ای از متکلّمان برپایه سخن بوعلی گفته‌اند که چون برهانی بر *امتناع* بازگرداندنِ [= اعاده] معدوم نیست پس *امکان* آن ثابت است: «از مردمان یکی به تقلید خو کرده و با پژوهش در حقایق و تلاش در دانش‌های عقلی همدم نشده و شنیده است که حکیمان گرامی و فیلسوفان بزرگوار می‌گویند که از چیزهای شگرف گیتی هرچه به گوش‌ات خورد، تا هنگامی‌که برهان‌آورنده‌ای از آن جدایت نساخته، در سرزمین امکان رهایش کن. [...] و چون غریزه او را راهی به سوی [...] امتناع بازگشت عین معدوم نبوده است، به این گمان چنگ درافکنده است، گمانی که سست‌ترین چیزی است که عنکبوت وهم چونان برهانی بر امکان آن می‌بافد» *(میرداماد، ۱۳۸۵، ج۲، ص۹۸)*.

میرداماد در رد دیدگاه این متکلم چند نکته را یادآوری می‌کند که از آن میان یکی با جستار ما در پیوند است: «آن‌چه شریکان پیشین ما[1] در این دانش گفته‌اند معنایش این است که آنچه نه برهانی

۱ـ یعنی ابن‌سینا.

بر وجوبش هست و نه برهانی بر امتناعش سزاوار انکار نیست؛ بلکه در سرزمین *امکان عقلی که بازگشتنش [به] احتمالِ در نگاه نخست* است، رها می‌شود» *(میرداماد، ۱۳۸۵، ج۲، ص۹۸)*.

همین سخنان را ملّاصدرا (با واژگانی بسیار نزدیک به میرداماد) تکرار کرده *(شیرازی، ۱۴۲۳هـ ج۱، ص۳۴۹ـ۳۴۸)*، *لاهیجی* بازگفته *(لاهیجی، ۱۴۲۵هـ ج۱، ص۵۱۹ـ۵۲۰)*، و سبزواری به نظم کشیده است:

و امتنـــاعـها لأمــــــر لازم   و معنی «الإمکان» خلاف الجازم

فی مثل «ذر فی بقعه الإمکان   ما لم یـذده قـائـم البـرهـان»

یعنی، امتناع اعاده معدوم به‌خاطر امری است که لازم هویّت شئ است؛[۱] و در سخنی مانند این‌که «آن‌چه را که از سوی برهان‌آورنده‌ای ابطال نشده، در سرزمین *امکان* رها کن» معنای «امکان» عدم جزم است *(سبزواری، ۱۳۷۹، ج۲، ص۱۹۴؛ قس: مطهری، ۱۳۸۴، ج۱، ص۵۳۱-۵۳۳)*.

نتیجه‌گیری

از بحث‌هایی که کردیم نکته‌های زیر دانسته شد:

۱ـ واژه «امکان» نزد فیلسوفان اسلامی دست‌کم هشت معنا دارد: امکان عام، امکان خاص، امکان اخص، امکان استقبالی، امکان استعدادی، امکان وقوعی، امکان فقری، و احتمال.

۲ـ واژه «احتمال» نیز برپایه آن‌چه *ابن‌سینا* می‌گوید، دست‌کم سه معنا دارد: الف ـ حالت عدم جزم (بی‌باوری، و نه ناباوری) فاعل شناسا نسبت به هر دو سوی سلب و ایجاب یک گزاره، که حالتی ذهنی، انفسی، و سوبژکتیو است؛ ب ـ چشم‌داشت و توقع فاعل شناسا نسبت وضع آینده چیزی که اکنون موجود نیست، و از جمله چشم‌داشت نسبت به اثبات صدق گزاره‌ای که اکنون صدقش معلوم نیست؛ ج. امکان خاص.

۳ـ معنای اول و دوم احتمال هم‌پوشانی دارند و از این‌رو با هم جمع‌پذیرند: معنای اول اعم است از معنای دوم.

۴ـ ابن‌سینا در بند ما قبل آخر *اشارات* می‌گوید که *عدم برهان بر امتناع* گزاره‌ای مستلزم *امکان* آن است. این در حالی است که گودل بر امکان فرضیه پیوستار کانتور برهان می‌آورد. اکنون سخن

۱ـ این در پاسخ به اشکالی است که می‌گوید: امتناع اعاده معدوم یا به‌خاطر ماهیت معدوم است، یا به‌خاطر لازم آن ماهیت است، یا به‌خاطر عرض مفارق آن؛ در فرض اوّل و دوم آن ماهیّت نمی‌بایست از آغاز به‌وجود می‌آمد، و در فرض دوم با زوال عرض مفارق امتناع اعاده هم زائل می‌شود. حکیم سبزواری می‌گوید: امتناع اعاده به‌خاطر هیچ یک از این سه امر نیست، بلکه به‌خاطر لازم هویّت شئ است.

ابن‌سینا نادرست است یا کار گودل بیهوده؟ پاسخ این جستار، برپایه نکته‌های بالا، گزینه سوم است. «امکان» در سخن ابن‌سینا به معنای احتمال است؛ احتمالِ به معنای بی‌باوریِ فاعل شناسا نسبت به هر دو سوی گزاره که می‌تواند با امید و چشمداشت به اثبات یکی از آن دو در آینده همراه باشد. این «امکان» صفتی ذهنی، حالتی انفسی، و امری سوبژکتیو است. برای «امکانِ» به این معنا عدم برهان بر امتناع کافی است؛ اما «امکان» در کار گودل به معنای امکان عام است؛ صفتی عینی، حالتی آفاقی، و امری اُبژکتیو است. برای «امکانِ» به این معنا عدم *برهان بر امتناع* کافی نیست؛ بلکه به *برهان بر عدم امتناع* نیاز است. بنابراین، نه سخن ابن‌سینا نادرست است و نه کار *گودل* بیهوده. ابن‌سینا می‌گوید که در صورت *عدم برهان بر امتناع* باید هم امکان عام و هم امتناع آن را احتمال داد، تا این‌که برهانی بر یکی از این دو سو یافت شود. گودل با آوردن *برهان بر عدم امتناعِ* فرضیه پیوستار، امکان عام آن را ثابت می‌کند.

۵ـ بدفهمی سخن ابن‌سینا برخی از متکلمان را بر آن داشته تا بگویند که بازگشت معدوم، ممکن است؛ چون برهانی بر امتناع آن اقامه نشده است. میرداماد، ملاصدرا، و لاهیجی در مقام نقد این استدلال بر همین نکته تأکید کرده‌اند که عدم برهان بر امتناعْ مستلزمِ امکانِ به معنای احتمال است، نه امکانی که یک معقول ثانی فلسفی است.

منابع و مآخذ

- ابن‌سینا، حسین بن عبدالله (۱۳۸۳)، ***الإشارات و التنبیهات***، مع الشرح لنصیرالدین الطوسی و شرح الشرح لقطب‌الدین الرازی، ۳جلدی، قم، نشر البلاغه
- ــــــــــ (۱۴۰۵هـ)، ***الشفاء: المنطق: ۳ـ العباره***، تصدیر و مراجعه الدکتور ابراهیم مدکور، بتحقیق محمود الخضیری، قم، منشورات مکتبه آیه الله العظمی المرعشی النجفی
- ابن‌اسحاق، حنین (۱۹۸۰م)، ***کتاب العباره***، در ***منطق أرسطو***، الجزء الأول، حققه و قدم له الدکتور عبدالرحمن البدوی، وکاله المطبوعات، الکویت، بیروت، دار القلم
- ادیب سلطانی، میر شمس‌الدین (۱۳۷۸)، ***منطق ارسطو (اُرگانون)***، تهران، مؤسسه انتشارات نگاه
- استراول، آورام (۱۳۸۷)، ***فلسفه تحلیلی در قرن بیستم***، ترجمه فریدون فاطمی، تهران، نشر مرکز
- بیرشک، احمد (۱۳۵۳)، ***«تئوری مجموعه‌ها و آفریدگار آن: گئورگ کانتور و تئوری مجموعه‌ها»***، ماهنامه آموزش و پرورش، شماره ۸۲
- خادم‌زاده، وحید، و محمد سعیدی‌مهر (۱۳۸۸)، ***«بررسی برهان‌های ریاضیاتی ابطال تسلسل بر اساس نظریه مجموعه‌ها»***، فلسفه و کلام اسلامی، دفتر ۱
- رازی، فخرالدین (۱۳۸۴)، ***شرح الإشارات و التنبیهات***، ۲جلدی، تهران، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی
- سبزواری، هادی (۱۳۷۹)، ***شرح المنظومه***، تصحیح و تعلیق حسن حسن‌زاده آملی، تهران، نشر ناب
- شیرازی، صدرالدین (۱۴۲۳هـ)، ***الحکمه المتعالیه فی الأسفار العقلیّه الأربعه***، ۹جلدی، بیروت، دار إحیاء التراث العربی
- طباطبایی، سید محمد حسین (۱۴۲۴ق) ***نهایه الحکمه***، صححه و علق علیه عباس‌علی الزارعی السبزواری، مؤسسه النشر الإسلامی، قم
- گودل، کورت (۱۳۸۲)، ***مسئله پیوستار کانتور چیست؟***، در: موحد، ضیاء (نویسنده و مترجم)، ***از ارسطو تا گودل***، تهران، هرمس

- لاهیجی، عبدالرزاق (۱۴۲۵هـ)، ***شوارق الإلهام فی شرح تجرید الکلام***، الجزء الأول، تحقیق الشیخ أکبر أسدعلی‌زاد، قم، مؤسسه الإمام الصادق علیه‌السلام
- لین، شووینگ تی، و یوـفنگ لین (۱۳۸۶)، ***نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن***، ترجمه عمید رسولیان، تهران، مرکز نشر دانشگاهی
- میرداماد، محمد باقر (۱۳۸۵) ***مصنفات میرداماد***، ۲جلدی، به اهتمام عبدالله نورانی، تهران، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی
- مطهری، مرتضی (۱۳۸۴)، ***مجموعه آثار ۹: جلد پنجم از بخش فلسفه: شرح مبسوط منظومه (۱)***، تهران، انتشارات صدرا
- هینتیکا، یاکو (۱۳۸۸)، ***درباره گودل***، ترجمه ساجد طیبی، مؤسسه انتشاراتی روزنامه ایران، تهران

منابع لاتین

- Audi, R. (1999), ***The Cambridge Dictionary of Philosophy***, Cambridge University Press, Cambridge
- Dauben, J. W. (1979), ***Georg Cantor, His Mathematics and the Philosophy of the Infinite***, Prinston University Press, Princeton, New Jersey
- Gödel, K. (1940), ***The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis With the Axioms of Set Theory***, Princeton University Press, Princeton, New Jersey
- Hilbert, D. (1900), '***Mathematical Problems', Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society,*** Volume 37, Number 4, pp. 407-436
- Rodych, V. (2007), '***Wittgenstein's Philosophy of Mathematics'***, in E. N. Zalta (Ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Internet Version)